



5.1. El ANOVA de múltiples factores:

- Factorial (ortogonal): los no ortogonales no los veremos
- Factores fijos, aleatorios y mixtos (consecuencias prácticas)
- El Anova encajado

La variable que vamos a estudiar (dependiente) = valor de HDL en sangre

Los factores:

Enfermo/Sano

Fumador/No fumador

Igual número de réplicas en cada combinación de los dos factores:

	Fumador	No fumador
Enfermo	5 casos	5 casos
Sano	5 casos	5 casos

Porcentage de HDL en sangre

	No fumador	Fumador
Muestra 1 (10 enfermos):	120, 116, 114, 117, 114,	112, 107, 110, 111, 113
Muestra 2 (10 sanos):	107, 108, 105, 107, 106,	111, 111 110, 111, 110



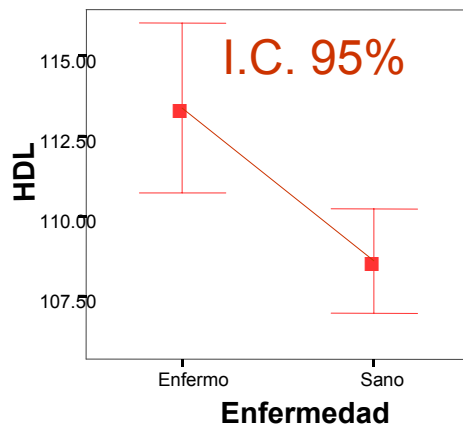
Tema V. EL ANOVA multifactorial

5.2. El ANOVA de dos factores fijos:

- Ejemplo y datos
- Interpretación unifactorial versus multifactorial (las interacciones)
- La importancia de las interacciones

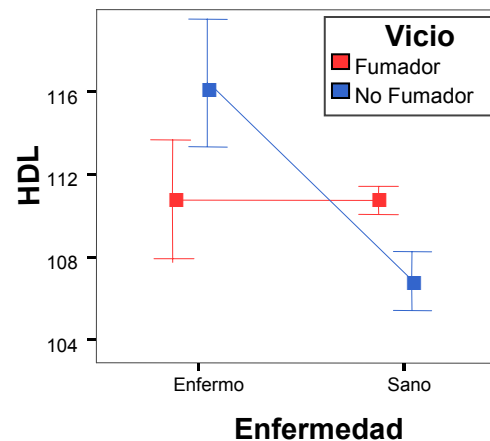
	Porcentaje de HDL en sangre	
	No fumador	Fumador
Muestra 1 (10 enfermos):	120, 116, 114, 117, 114,	112, 107, 110, 111, 113
Muestra 2 (10 sanos):	107, 108, 105, 107, 106,	111, 111, 110, 111, 110

Factor Enfermedad



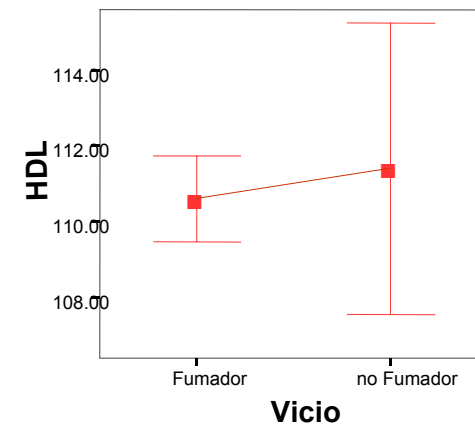
$$F_{\text{unifactorial}} = 12,14^{**}$$

Los 2 factores y la interacción



$$\begin{aligned} F_{\text{enfermedad}} &= 135,17^{***} \\ F_{\text{vicio}} &= 0,03^{ns} \\ F_{\text{interacción}} &= 35,17^{***} \end{aligned}$$

Factor Vicio



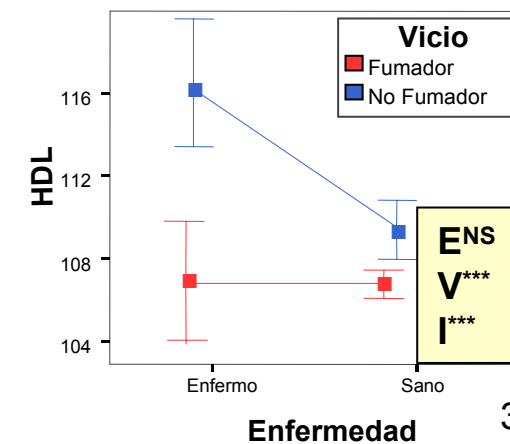
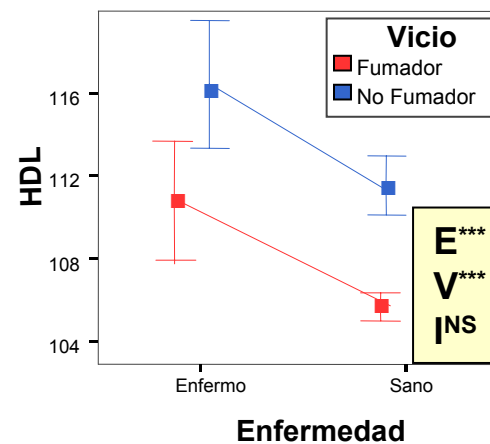
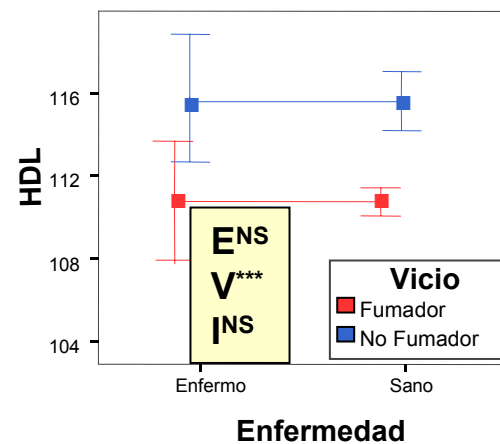
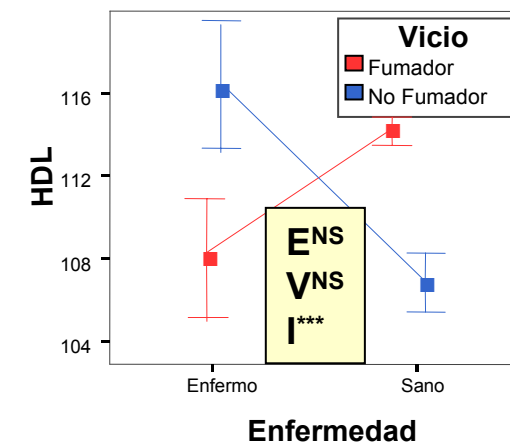
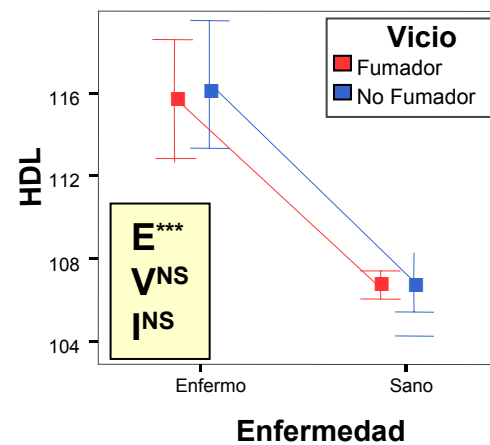
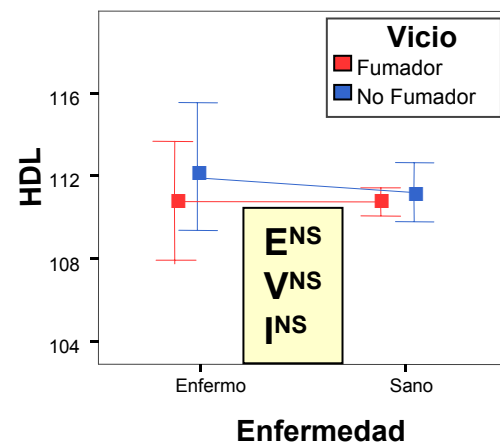
$$F_{\text{unifactorial}} = 0,20^{ns}$$



Tema V. EL ANOVA multifactorial

5.2. El ANOVA de dos factores fijos:

- Descripción de los posibles efectos:
 . Enfermedad (E); Vicio (V) e interacción (I)





Tema V. EL ANOVA multifactorial

5.2. El ANOVA de dos factores fijos:

- Las fórmulas son una extensión del ANOVA unifactorial
- Se aplican igual para dos o más factores...

No fumador (1)	Fumador (b)
Enfermos (1): $x_{ab1}, x_{ab2}, x_{ab3}, \dots, x_{abn}$	$x_{ab1}, x_{ab2}, x_{ab3}, \dots, x_{abn}$
Sanos (a): $x_{ab1}, x_{ab2}, x_{ab3}, \dots, x_{abn}$	$x_{ab1}, x_{ab2}, x_{ab3}, \dots, x_{abn}$

Source of variation	Sum of Squares (Appendix 2 Equations)	Machine formula for SS	Degrees of freedom
Among levels of Factor A:	SS_A : Eq. 13	$\frac{\sum^a \left(\sum^b \sum^n x_{ijk} \right)^2}{bn} - K^*$	$(a - 1)$
Among levels of Factor B	SS_B : Eq. 14	$\frac{\sum^b \left(\sum^a \sum^n x_{ijk} \right)^2}{an} - K^*$	$(b - 1)$
Interaction: $A \times B$	SS_{AB} : Eq. 15	$\frac{\sum^a \sum^b \left(\sum^n x_{ijk} \right)^2}{n} - K - SS_A - SS_B$	$(a - 1)(b - 1)$
Residual	Eq. 12	$\sum^a \sum^b \left(\sum^n x_{ijk}^2 - \left(\sum^n x_{ijk} \right)^2 / n \right)$	$ab(n - 1)$
Total	Eq. 10	$\sum^a \sum^b \sum^n x_{ijk}^2 - K$	$abn - 1$

$$*K = \left(\sum^a \sum^b \sum^n x_{ijk} \right)^2 / abn$$



Tema V. EL ANOVA multifactorial

5.2. El ANOVA de dos factores fijos:

- Los componentes de varianza y el test estadísticos:
 - . La mayoría de los PROGRAMAS aplican el modelo III (no se corrigen)
 - . Realización del test

No fumador (1)	Fumador (b)
Enfermos (1): $x_{ab1}, x_{ab2}, x_{ab3}, \dots, x_{abn}$	$x_{ab1}, x_{ab2}, x_{ab3}, \dots, x_{abn}$
Sanos (a): $x_{ab1}, x_{ab2}, x_{ab3}, \dots, x_{abn}$	$x_{ab1}, x_{ab2}, x_{ab3}, \dots, x_{abn}$

Factores	Componentes	Test
Enfermedad (E)	$CM_E = \sigma_w^2 + bn\sigma_E^2/(a-1)$	CM_E/CM_w
Vicio (V)	$CM_V = \sigma_w^2 + an\sigma_V^2/(b-1)$	CM_V/CM_w
Interacción (EV)	$CM_{EV} = \sigma_w^2 + n\sigma_{EV}^2$	CM_{EV}/CM_w
Residuo (w)	$CM_w = \sigma_w^2$	

	Gl	SC	CM	Test F
Enfermedad (E)	1	115	115	$115/3,3 = 35^{***}$
Vicio (V)	1	3,2	3,2	$3,2/3,3 = 0,9^{ns}$
Interacción (I= ExV) 1	115	115	115	$115/3,3 = 35^{***}$
Residuo	16	52,4	3,27	
Total	19			

Tema V. EL ANOVA multifactorial

5.2. El ANOVA de dos factores fijos:

- El test estadístico (modelo I):
 - . Salida de software especializado (SPSS/PC)

Variable dependiente: HDL

Fuente	Suma de cuadrados tipo I	gl	Media cuadrática	F	Significación
Modelo corregido	233.600 ^a	3	77.867	23.776	.000
Intersección	246420.000	1	246420.000	75242.748	.000
Enfermedad	115.200	1	115.200	35.176	.000
Vicio	3.200	1	3.200	.977	.338
Enfermedad * Vicio	115.200	1	115.200	35.176	.000
Error	52.400	16	3.275		
Total	246706.000	20			
Total corregida	286.000	19			

a. R cuadrado = .817 (R cuadrado corregida = .782)

¡En cualquier caso la interacción es importante!



Tema V. EL ANOVA multifactorial

5.2. El ANOVA de dos factores fijos:

- La magnitud de los efectos (uso de los η^2):
- . Comparación de dos factores significativos

Enfermedad	115.200	1	115.200	35.176	.000
Vicio	3.200	1	3.200	.977	.338
Enfermedad * Vicio	115.200	1	115.200	35.176	.000
Error	52.400	16	3.275		

Factores	Componentes	Test
Enfermedad (E)	$CM_E = \sigma_w^2 + bn\sigma_E^2/(a-1)$	CM_E/CM_w
Vicio (V)	$CM_V = \sigma_w^2 + an\sigma_V^2/(b-1)$	CM_V/CM_w
Interacción (EV)	$CM_{EV} = \sigma_w^2 + n\sigma_{EV}^2$	CM_{EV}/CM_w
Residuo (w)	$CM_w = \sigma_w^2$	

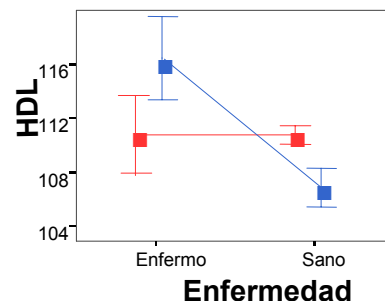
$$\eta^2_{EV} = (CMEV - CM_w) = 22,4$$

n

$$\eta^2_E = (CME - CM_w)(a-1) = 11,2$$

bn

Efecto EV >> Efecto E



¡La interacción es de hecho LO MÁS IMPORTANTE!



Tema V. EL ANOVA multifactorial

5.3. El ANOVA de dos factores aleatorios y mixto:

- Si imaginamos otro ejemplo con distintos factores:
 - . Aleatorio: la evaluación de los componentes E (aleatorio) V (aleatorio)
 - . Mixto: la evaluación de los componentes E (fijo) V (aleatorio)
- Se pueden deducir los componentes de cualquier ANOVA, a partir del sencillo
- Los software comerciales realizan estos cálculos automáticamente
- Se pueden estimar los componentes de la varianza (de forma parecida a los η^2)

ANOVA aleatorio

Factores	Componentes	Test
Enfermedad (E)	$CM_E = \sigma_w^2 + n\sigma_{EV}^2 + bn\sigma_E^2/(b-1)$	CM_E/CM_{EV}
Vicio (V)	$CM_V = \sigma_w^2 + n\sigma_{EV}^2 + an\sigma_V^2/(a-1)$	CM_V/CM_{EV}
Interacción (EV)	$CM_{EV} = \sigma_w^2 + n\sigma_{EV}^2$	CM_{EV}/CM_w
Residuo (w)	$CM_w = \sigma_w^2$	

ANOVA mixto

Factores	Componentes	Test
Enfermedad (E)	$CM_E = \sigma_w^2 + n\sigma_{EV}^2 + bn\sigma_E^2/(a-1)$	CM_E/CM_{EV}
Vicio (V)	$CM_V = \sigma_w^2 + an\sigma_V^2$	CM_V/CM_w
Interacción (EV)	$CM_{EV} = \sigma_w^2 + n\sigma_{EV}^2$	CM_{EV}/CM_w
Residuo (w)	$CM_w = \sigma_w^2$	



Tema V. EL ANOVA multifactorial

5.3. El ANOVA de dos factores aleatorio y mixto:

- El ejemplo anterior pero analizado mediante modelos mixto ó aleatorio:

Porcentage de HDL en sangre		
	No fumador	Fumador
Muestra 1 (10 enfermos):	120, 116, 114, 117, 114,	112, 107, 110, 111, 113
Muestra 2 (10 sanos):	107, 108, 105, 107, 106,	111, 111 110, 111, 110

ANOVA aleatorio

Fuente		Suma de cuadrados tipo I	gl	Media cuadrática	F	Significación
Intersección	Hipótesis	246420.000	1	246420.000	77006.250	.002
	Error	3.200	1	3.200 ^a		
Enfermedad	Hipótesis	115.200	1	115.200	1.000	.500
	Error	115.200	1	115.200 ^b		
Vicio	Hipótesis	3.200	1	3.200	.028	.895
	Error	115.200	1	115.200 ^b		
Enfermedad * Vicio	Hipótesis	115.200	1	115.200	35.176	.000
	Error	52.400	16	3.275 ^c		

a. MS(Vicio)

b. MS(Enfermedad * Vicio)

c. MS(Error)

El mixto es muy parecido $F_V = 3,2/3,27$



5.4. El ANOVA de dos factores encajado:

- En algunos casos interesa la variación de un factor superpuesta a la variación en otro
- Factores encajados: los niveles dentro de cada tratamiento no son idénticos

Datos Antiguos

No fumador	Fumador
Enfermos: 120, 116, 114, 117, 114,	112, 107, 110, 111, 113
Sanos: 107, 108, 105, 107, 106,	111, 111 110, 111, 110

Datos Nuevos

Enfermos		Sanos	
Año 1	Año 2	Año 1	Año 2
120	112	107	111
116	107	108	111
114	110	105	110
117	111	107	111
114	113	106	110

Año 1 y Año 2 no serían los mismos, necesariamente, en Enfermos y Sanos....



Tema V. EL ANOVA multifactorial

5.4. El ANOVA de dos factores encajado:

- La partición de un ANOVA encajado: Enfermedad (Fijo), Año (encajado)

E (FIJO) y **A** (FIJO)

Factores	G.L.	S.C.	Componentes	Test
Enfermedad (E)	a-1	SC_E	$CM_E = \sigma_w^2 + bn\sigma_E^2/(a-1)$	CM_E/CM_w
Año (A)	b-1	SC_A	$CM_A = \sigma_w^2 + an\sigma_A^2/(b-1)$	CM_A/CM_w
Interacción (EA)	(a-1)(b-1)	SC_{EA}	$CM_{EA} = \sigma_w^2 + n\sigma_{EA}^2$	CM_{EA}/CM_w
Residuo (w)	ab(n-1)	SC_w	$CM_w = \sigma_w^2$	

E (FIJO) y **A** (ENCAJADO)

Factores	G.L.	S.C.	Componentes	Test
Enfermedad (E)	a-1	SCE	$CM_E = \sigma_w^2 + n\sigma_A^2 + bn\sigma_E^2/(a-1)$	CM_E/CM_A
Año (A(E))	a(b-1)	SCA+SCEA	$CM_A = \sigma_w^2 + n\sigma_A^2$	CM_A/CM_w
Residuo (w)	ab(n-1)	SCw	$CM_w = \sigma_w^2$	



5.4. El ANOVA de dos factores encajado:

- El ejemplo

Datos Nuevos

Enfermos		Sanos	
Año 1	Año 2	Año 1	Año 2
120	112	107	111
116	107	108	111
114	110	105	110
117	111	107	111
114	113	106	110

Enfermedad	115.200	1	115.200	35.176	.000
Año	3.200	1	3.200	.977	.338
Enfermedad * Año	115.200	1	115.200	35.176	.000
Error	52.400	16	3.275		

	Gl	SC	CM	Test F
Enfermedad (E)	1	115	115	115/59,2 = 1,9 ^{ns}
Año (A(E))	2	118,4	59,2	59,2/3,3 = 18,1 ^{***}
Residuo	16	52,4	3,27	
Total	19			

Los efectos de la enfermedad no son reales si se promedian en años diferentes



5.5. El ANOVA de más de dos factores:

- No hay límite teórico, pero muchos diseños no son prácticos
- Hay que evaluar los grados de libertad del numerador y denominador (test F)

(i) 3 Orthogonal Factors: A, B, C		
Source of variation	SS	D.f.
A	S_A	$(a - 1)$
B	S_B	$(b - 1)$
C	S_C	$(c - 1)$
A × B	S_{AB}	$(a - 1)(b - 1)$
A × C	S_{AC}	$(a - 1)(c - 1)$
B × C	S_{BC}	$(b - 1)(c - 1)$
A × B × C	S_{ABC}	$(a - 1)(b - 1)(c - 1)$
Residual	S_R	$abc(n - 1)$
Total	S_T	$abcn - 1$
(ii) 2 Orthogonal Factors: A, B and 1 Nested Factor: C(A × B)		
Source of variation	SS from (i)	D.f.
A	S_A	$(a - 1)$
B	S_B	$(b - 1)$
A × B	S_{AB}	$(a - 1)(b - 1)$
C(A × B)	$S_C + S_{AC} + S_{BC} + S_{ABC}$	$ab(c - 1)$
Residual	S_R	$abc(n - 1)$
Total	S_T	$abcn - 1$
(iii) 2 Orthogonal Factors: A, B and 1 Nested Factor: C(A)		
Source of variation	SS from (i)	D.f.
A	S_A	$(a - 1)$
B	S_B	$(b - 1)$
A × B	S_{AB}	$(a - 1)(b - 1)$
C(A)	$S_C + S_{AC}$	$a(c - 1)$
B × C(A)	$S_{BC} + S_{ABC}$	$a(b - 1)(c - 1)$
Residual	S_R	$abc(n - 1)$
Total	S_T	$abcn - 1$



Referencias Bibliográficas

LIBROS:

Sokal, R.R., Rohlf, F.J. 1995. Biometry. Freeman and co., New York

Underwood, A.J. 1981. Techniques of analysis of variance in experimental marine biology and ecology. *Oceanogr. Mar. Biol. Ann. Rev.*, 19: 513-605.

PÁGINAS WEB:

<http://www.provalisresearch.com/simstat/simstatv.html>

(Ejemplo de software aplicado de estadística que se puede descargar gratis por 30 días)